Page d'informations sur le document

Titre :	*LA TRIGONOMÉTRIE*
Type de document :	*Analyse conceptuelle*
Auteurs :	*BEAULIEU, Véronique ; CORMIER, Louis ;*
	MORRISSEAU, Marc-André ; TREMBLAY, Karl-Philippe
Date de production :	*24 avril 2013*
Numéro d'identification :	*a-075*
Pour le cours :	*Séminaire de synthèse (ESM6150), UQAM*
1re édition électronique :	*24 avril 2013*
Publié sur le site du LDM -	*Laboratoire de didactique des mathématiques.*
	Département de mathématiques, UQAM

Analyse conceptuelle sur la trigonométrie

Travail présenté à
Monsieur Michel Coupal

Dans le cadre du cours
ESM-6150 Séminaire de synthèse
Session 8 année 4

Par
BEAULIEU, Véronique
CORMIER, Louis
MORRISSEAU, Marc-André
TREMBLAY, Karl-Philippe

Baccalauréat en Enseignement Secondaire
Concentration Mathématiques

2013, avril, 24

TABLE DES MATIÈRES

TRIGONOMÉTRIE

1. Historique de la trigonométrie

1.1 Aperçu historique de la trigonométrie

La trigonométrie nous proviendrait, selon plusieurs sources, d'il y a 4000 ans, soit 2000 ans avant Jésus Christ. En effet, on retrouverait des traces de l'utilisation de la trigonométrie chez les Babyloniens ainsi que chez les Égyptiens. Son utilisation, à la base, était essentiellement astronomique. D'ailleurs, les Grecs s'en servirent afin de calculer plusieurs mesures astronomiques comme la distance entre la Lune et la Terre avec une très petite marge d'erreur (soit 2%)!

C'est Hipparque, un des plus grands astronomes de l'Antiquité, qui perfectionna, le premier, la trigonométrie. Cette idée lui est venue lorsqu'il a cru bon d'utiliser les latitudes et les longitudes terrestres. Cependant, puisque Hipparque était astronome, la trigonométrie n'était qu'un outil pour sa science. De ce fait, il n'entrevoyait que des applications astronomiques et c'est ce qui explique que sa trigonométrie était sphérique (nous pouvons donc affirmer que la trigonométrie du cercle a précédé la trigonométrie du triangle!) Hipparque fut le premier à construire des tables trigonométriques. Ces dernières faisaient correspondre une valeur de l'angle au centre du cercle avec la longueur de la corde interceptée pour un certain rayon donné. Il faut toutefois noter que les travaux d'Hipparque ne nous sont parvenus que par les travaux de Ptolémée. Ce dernier publia le mode de construction des tables vers l'an 150 dans son livre *Amalgeste*.

La trigonométrie a cependant pris son apogée avec le monde arabo-musulman puisqu'elle se distance de l'astronomie pour prendre le statut de discipline à part entière. Les Arabes vont mettre ensemble les connaissances indiennes et grecques pour ainsi former des tables de sinus et faire de la trigonométrie hors du cercle. C'est à Mohamed-ben-Geber que l'on doit l'emploi des sinus et non des cordes comme Hipparque. Il a du coup changé les tables de cordes en tables de sinus.

Finalement, grâce aux conquêtes européennes des Arabes (qui ont conquis tout le Portugal et l'Espagne), leurs connaissances sur la trigonométrie sera transmises aux Européens qui continueront de la perfectionner jusqu'à obtenir la trigonométrie que nous connaissons aujourd'hui. Un des mathématiciens qui travailla la trigonométrie est Georg von Peuerbach qui découvrit la formule :

$$T = \frac{1}{2} ab \sin C.$$

Un autre mathématicien important a été Copernic (surtout connu pour son modèle astronomique) qui a introduit la notation "sec".

1.2 Origine du mot sinus

Le mot “sinus” peut paraître étrange et plusieurs peuvent se demander d’où origine ce mot si important à la trigonométrie. En fait, il provient directement du monde arabo-musulman. Comme nous l’avons mentionné dans l’aperçu historique, les arabes ont, à leur époque, pris les connaissances grecques ainsi que les connaissances indiennes afin de développer plusieurs théories.

Cependant, prendre les connaissances des autres peuples nécessite évidemment de traduire les ouvrages. Ainsi, lorsque les arabes ont trouvé des traités trigonométriques indiens, ils ont trouvé le mot “Jiva”. Ce dernier a été traduit par “Jv” puisque l’on n’écrivait pas les voyelles en arabe. Avec le temps, le mot “Jv” s’est transformé en “Jb” qui était alors prononcé “Jaïb”. Mais le mot “Jaïb” avait une signification autre qui voulait dire col, poitrine. Lorsque les européens ont découvert les travaux arabes lors des croisades et qu’ils ont voulu les traduire, ils ont pris le mot “Jaïb” qu’ils ont traduit littéralement en “sinus” qui voulait aussi dire col ou poitrine. De là est né le mot sinus!

2. Préalables à la trigonométrie

Avant d’entrer dans la trigonométrie comme telle, l’élève doit avoir vu différents concepts mathématiques qui lui permettront d’acquérir les notions qui sont propres à la trigonométrie. Tout d’abord, il est important de faire une distinction entre la trigonométrie dans le triangle et dans le cercle par rapport aux fonctions trigonométriques.

Débutons par la trigonométrie dans le triangle et dans le cercle. Pour bien comprendre les nouvelles notions, l’élève devra maîtriser, ou à tout le moins connaître les concepts suivants: les triangles rectangles et leur vocabulaire respectif (cathète et hypoténuse), la relation de Pythagore ainsi que les relations métriques dans le triangle rectangle. Finalement, une connaissance de l’approche par démonstration (preuves) sera nécessaire lorsque les élèves devront démontrer certaines identités trigonométriques. Pour ce qui est de la trigonométrie du cercle, l’élève devra nécessairement maîtriser le langage propre au cercle comme les arcs, les cordes, les angles inscrits, les angles intérieurs ainsi que les angles extérieurs.

Passons maintenant aux fonctions trigonométriques. Afin de bien acquérir ce sujet, les élèves doivent évidemment être à l’aise avec les mots ayant rapport à la trigonométrie comme sinus et cosinus. Également, puisque nous parlons alors de fonctions, les élèves doivent être à l’aise avec tous les concepts reliés aux fonctions: distinguer variable dépendante et variable indépendante, être en mesure de passer d’un mode de représentation à un autre, connaître les propriétés d’une fonction (domaine, image, etc.). Finalement, le fait d’avoir travaillé avec les fonctions linéaires, quadratiques est nécessaire puisque ce travail aura permis aux élèves de bien comprendre le rôle et l'importance de chaque paramètre.

3. La trigonométrie dans le triangle

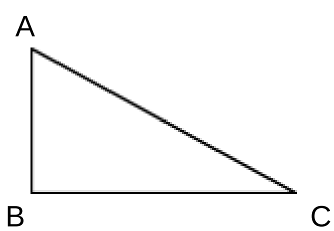
La trigonométrie dans le triangle est abordée en deuxième année du deuxième cycle du secondaire dans toutes les séquences. L'enseignement de la trigonométrie dans le triangle débute avec l'étude des rapports trigonométriques dans le triangle rectangle pour ensuite se généraliser à tous les triangles à l'aide de la loi des sinus et des cosinus.

3.1 Les raisonnements importants

3.1.1 Les rapports trigonométriques dans le triangle rectangle

Peu importe la séquence (CST, TS ou SN), le premier but de la trigonométrie selon le programme de formation de l'école secondaire est la recherche de mesures manquantes dans un triangle rectangle à l'aide des rapports trigonométriques. Les trois rapports qui sont au programme sont le sinus, le cosinus ainsi que la tangente. Il est également à noter qu'en troisième année du deuxième cycle du secondaire, dans les séquences TS et SN, les élèves devront également exploiter la cosécante, la sécante et la cotangente.

Nous allons, pour chaque rapport, nous ramener au triangle qui suit:



Peu importe le rapport, il sera important de se rapporter à un angle précis. Ici, l'angle B est droit, donc nous n'y ferons pas référence. Nous nous intéresserons plutôt aux angles A et C. Il est aussi primordial de se souvenir qu'un sinus, un cosinus ou une tangente est un rapport. Finalement, nous ne parlerons pas de sinus, de cosinus ou de tangente de l'angle droit. En effet, quel serait le côté adjacent à l'angle B, AB ou BC?

Débutons par le sinus. Ce dernier est le rapport entre le côté opposé et l'hypothénuse du triangle rectangle. Ainsi, si on demande le sinus de l'angle A, il faudrait effectuer le rapport entre les côtés BC (côté opposé à l'angle A) et AC (hypothénuse du triangle rectangle). On le noterait comme suit: sin(A) = mBC/mAC.

Le cosinus est le rapport entre le côté adjacent à l'angle et l'hypothénuse du triangle rectangle. En se ramenant à l'exemple, le cosinus de l'angle C serait le rapport entre le côté BC (côté adjacent à l'angle C) et le côté AC (hypothénuse du triangle rectangle). On utilise la notation suivante:
cos(C) = mBC/mAC.

Petite note intéressante avant de passer à la tangente. Vous l'avez peut-être remarqué avec les exemples utilisés pour le sinus et le cosinus, mais sin(A) = cos(C). Cette propriété sera respectée dans tous les triangles rectangles. En effet, peu importe l'angle choisi, l'hypothénuse reste la même puisque nous restons dans le même triangle et le côté opposé à l'angle A sera toujours le côté adjacent à l'angle C!

Nous arrivons ensuite à la tangente. Cette dernière est le rapport entre le côté opposé à l'angle et le côté adjacent à l'angle. Ainsi, toujours en se rapportant à l'exemple, la tangente de l'angle A serait le côté BC (côté opposé à l'angle) en rapport avec le côté AB (côté adjacent à l'angle). On la note comme suit: tan(A) = mBC/mAB. Il est aussi intéressant de remarquer que la tangente d'un angle peut aussi être considérée comme le rapport entre le sinus d'un angle et son cosinus. Si nous nous ramenons à l'angle A.

sin(A) = mBC/mAC
cos(A) = mAB/mAC

Si nous effectuons le rapport entre le sinus et le cosinus, nous obtenons ceci:

sin(A)/cos(A) = (mBC/mAC)/(mAB/mAC) = mBC/mAB

Et nous savons que tan(A) = mBC/mAB. Donc tan(A) = sin(A)/cos(A).

Il peut être difficile pour les élèves de se souvenir de chaque rapport. Du coup, il peut être intéressant de leur présenter la formule mnémotechnique suivante: SOH-CAH-TOA. Il s'agit de la première lettre de chacun des mots dans les rapports (Sinus = Opposé/Hypothénuse, Cosinus = Adjacent/Hypothénuse, Tangente = Opposé/Adjacent) et les élèves pourront facilement repérer quels côtés ils doivent sélectionner afin de trouver la mesure manquante.

Regardons maintenant les trois rapports qui sont au programme en SN et TS en troisième année du deuxième cycle du secondaire. En fait, chacun de ces trois rapports est l'inverse de l'un des trois autres.

La sécante est l'inverse du cosinus. Ainsi, sec(C) = 1/cos(C). Nous savons cependant que cos(C) = mBC/mAC. Donc sec(C) = 1/(mBC/mAC) = mAC/mBC. En se rapportant à notre triangle, nous remarquons que, par rapport à l'angle C, le côté AC est l'hypothénuse et le côté

BC est le côté adjacent à l'angle. La sécante d'un angle est donc le rapport entre l'hypothénuse d'un triangle et le côté adjacent à cet angle.

Le même principe s'applique pour la cosécante et la cotangente. La cosécante est l'inverse du sinus et la cotangente est l'inverse de la tangente. Nous obtenons alors que la cosécante d'un angle est le rapport entre l'hypothénuse du triangle et le côté opposé à l'angle.

Dans notre exemple, cosec(A) = mAC/mBC. La cotangente d'un angle est du coup le rapport entre le côté adjacent à l'angle et le côté opposé à l'angle. cot(A) = mAB/mBC.

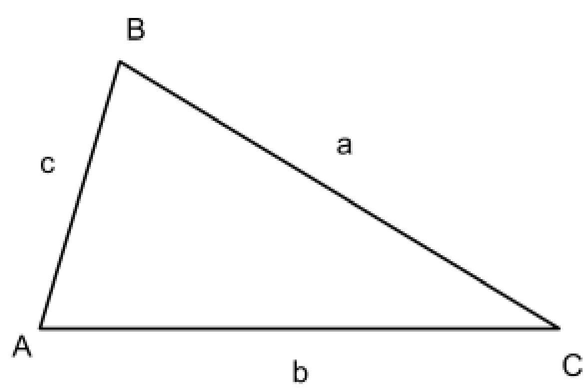
Il est important de comprendre que les rapports trigonométriques dans le triangle font beaucoup référence aux rapports trigonométriques dans le cercle.

3.1.2 La loi des sinus

La loi des sinus est la suite logique aux rapports trigonométriques dans le triangle rectangle. Cette loi est au programme dans les séquences SN et CST en deuxième année du deuxième cycle du secondaire et en troisième année du deuxième cycle du secondaire pour la séquence TS.

La loi des sinus permet la généralisation de la trigonométrie dans tous les types de triangles. En effet, alors que les rapports trigonométriques ne fonctionnent que dans les triangles rectangles, la loi des sinus peut être utilisée dans tous les triangles.

Par exemple, prenons le triangle quelconque suivant:



La loi des sinus nous affirme ceci: sinA/a = sinB/b = sinC/c. Ainsi, le rapport entre le sinus d'un angle et son côté opposé est toujours équivalent dans un triangle.

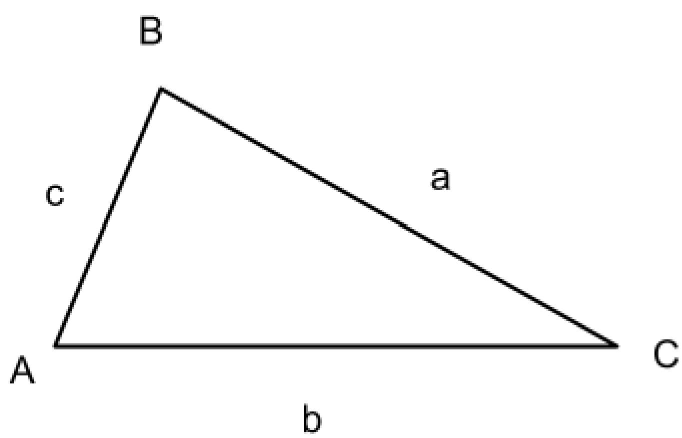
Cette loi est utile dans la recherche de mesures manquantes dans un triangle, ce qui est un objectif principal au deuxième cycle (la recherche de mesures manquantes).

3.1.3 La loi des cosinus

La loi des cosinus est une loi qui va dans dans le même sens que la loi des sinus dans la perspective qu'elle est utile dans la recherche de mesures manquantes. Cependant, elle n'est pas au programme de toutes les séquences. Elle doit être vue en deuxième année du deuxième cycle du secondaire dans la séquence SN et en troisième année du deuxième cycle du secondaire en TS. La loi des cosinus n'est pas au programme de CST, que ce soit en deuxième ou en troisième année du deuxième cycle du secondaire.

Dans le langage de l'éducation au Québec, ce théorème porte le nom de loi des cosinus, mais en mathématiques, on le retrouve également sous le nom de théorème d'Al-Kashi ou de théorème de Pythagore généralisé (nous verrons pourquoi plus loin!).

Encore une fois, prenons le triangle suivant à titre de référence:



La loi des cosinus stipule que dans tout triangle, nous pouvons appliquer l'égalité qui suit:

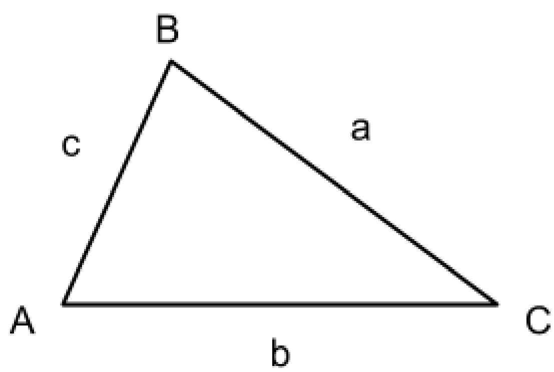
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2*a*b*\cos C$$

Vous l'avez sûrement remarqué, la forme ressemble beaucoup à celle du théorème de Pythagore. Toutefois, il y a le - 2*a*b*cosC qui s'ajoute. Cependant, si nous nous mettons dans le contexte d'un triangle rectangle, l'angle C mesurerait 90 degrés. Du coup cos90 = 0. Donc - 2*a*b*cosC prend la valeur de 0 et nous retrouvons le théorème de Pythagore. C'est pourquoi la loi des cosinus s'appelle aussi théorème de Pythagore généralisé. La petite propriété qui vient d'être énoncée peut être très intéressante à traiter en classe avec les élèves!

3.1.4 Calculer l’aire d’un triangle quelconque à partir de la mesure d’un angle et de deux côtés ou de la mesure de deux angles et d’un côté

Ce sujet est au programme dans toutes les séquences en deuxième année du deuxième cycle du secondaire. Il est évidemment une suite à la trigonométrie dans le triangle rectangle puisque l’on utilisera le sinus pour calculer l’aire. Il faut tout d’abord noter que ce sujet en contient deux. Il y a tout d’abord le fait de calculer l’aire d’un triangle à partir de la mesure d’un angle de deux côtés ainsi que le fait de calculer l’aire d’un triangle à partir de deux angles et d’un côté. Débutons par le premier sujet.

Prenons le triangle suivant à titre d’exemple:



Afin de calculer l’aire de ce triangle dans lequel on connaît deux côtés ainsi qu’un angle, l’élève devra utiliser la formule suivante:

Aire = ½*b*c*sinA

Il est toutefois important de remarquer que l’angle A se retrouve au centre des côtés b et c et il est primordial que ce soit le cas. Ainsi, si nous connaissons les côtés b et c ainsi que l’angle C, nous devons utiliser la loi des sinus (ou la loi des cosinus) afin de trouver la valeur de l’angle qui se trouve entre les côtés c et b ou afin de trouver la mesure du côté a.

Passons maintenant à la deuxième situation où nous aurions deux angles ainsi qu’un côté. La formule à utiliser est la même. Toutefois, l’élève devra utiliser la loi des sinus (ou des cosinus) afin de trouver la mesure d’un deuxième côté pour utiliser la formule.

3.2 Difficultés et conceptions

3.2.1 Les rapports trigonométriques dans le triangle rectangle

Pour ce qui est des rapports trigonométriques dans le triangle rectangle, les élèves n’ont pas vraiment de fausses conceptions, puisque les mots sinus, cosinus et tangente sont de nouveaux mots pour eux. Ainsi, puisqu’ils ne connaissent pas ce concept, ils ne peuvent pas avoir de fausses conceptions.

Pour les difficultés, il y en a toutefois plusieurs. Tout d’abord, l’élève peut avoir de la difficulté à se souvenir quels sont les rapports. Par exemple, il pourrait oublier que le sinus est le rapport entre le côté opposé et l’hypothénuse. Également, l’élève peut avoir de la difficulté à bien identifier ses côtés (opposé, adjacent et hypothénuse). Cette difficulté peut arriver surtout lorsque le triangle rectangle est “désaxé”. En effet, nous présentons très souvent le triangle rectangle dans le même sens (avec un côté horizontal et un côté vertical). Si nous modifions l’orientation du triangle, ça peut être une difficulté pour l’élève.

3.2.2 La loi des sinus

Une des difficultés qui peut être reliée à la loi des sinus est en lien avec les rapports. Un élève qui a de la difficulté à trouver une valeur dans un rapport aura nécessairement de la difficulté avec la loi des sinus. Une autre difficulté peut survenir avec l’opération $\sin\theta$. Pour certains élèves, ils voudront diviser par sin pour isoler θ. Il faut leur faire comprendre le bon chemin pour isoler.

3.2.3 La loi des cosinus

Une des difficultés que les élèves pourraient avoir avec la loi des cosinus est un problème dans l’identification des côtés et des angles. Ils pourraient ainsi ne pas utiliser les bonnes mesures aux bons endroits dans la formule. Également, un petit peu comme pour la loi des sinus, les élèves pourraient vouloir “diviser par cos” afin d’isoler l’angle. Il faudra leur faire comprendre la bonne signification d’un cosinus.

3.2.4 Calculer l’aire d’un triangle quelconque à partir de la mesure d’un angle et de deux côtés ou de la mesure de deux angles et d’un côté

Une des difficultés avec cette formule est que les élèves la trouveront plus compliquée que celle qu’ils connaissent déjà soit (base x hauteur)/2. Ils essaieront peut-être de se ramener à cette formule au lieu d’utiliser celle comportant un sinus. Également, la formule demande l’utilisation de l’angle au centre des deux côtés utilisés. Les élèves pourraient utiliser le mauvais angle ou tout simplement avoir de la difficulté à trouver la valeur de l'angle au centre des deux côtés.

4. La trigonométrie dans le cercle

La trigonométrie dans le cercle est au programme uniquement dans le programme de la séquence TS en troisième année du deuxième cycle du secondaire. Cependant, le cercle trigonométrique est aussi étudié dans la séquence SN en troisième année du deuxième cycle du secondaire (dans l'étude des fonctions sinusoïdales).

4.1 Les raisonnements importants

La trigonométrie dans le cercle comporte deux raisonnements importants. Le premier est évidemment le cercle trigonométrique et le second est la recherche de mesure d'arcs à partir des angles au centre.

4.1.1 La recherche de mesure d'arcs à partir d'angles au centre

Débutons par le premier sujet, soit la recherche de mesure d'arcs à partir d'angles au centre. Pour ce faire, il est important d'introduire le concept de radian.

Un angle de 1 radian (noté rad) intercepte, sur la circonférence de ce cercle, un arc de longueur équivalente au rayon du cercle. Un cercle complet représente un angle de 2πrad. Concrètement, 1 rad équivaut à environ 57,3 degrés ($180/\pi$)[1]. Voici quelques correspondances entre les degrés et les radians:

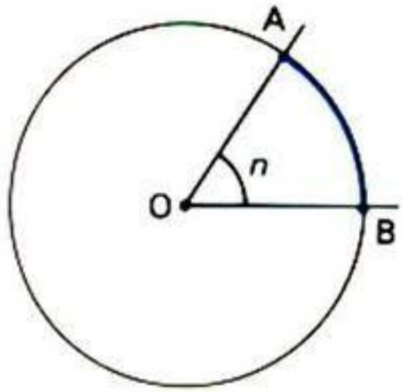
360 degrés équivant à 2πrad
180 degrés équivaut à πrad
90 degrés équivaut à $\pi/2$rad

Afin de calculer la mesure d'un arc, un élève devra utiliser la formule suivante:

La mesure de l'arc AB = mesure de l'angle au centre · mesure du rayon du cercle

[1] Le radian, http://fr.wikipedia.org/wiki/Radian, (Page consultée le lundi 18 mars 2013).

Par exemple, prenons le cercle suivant:

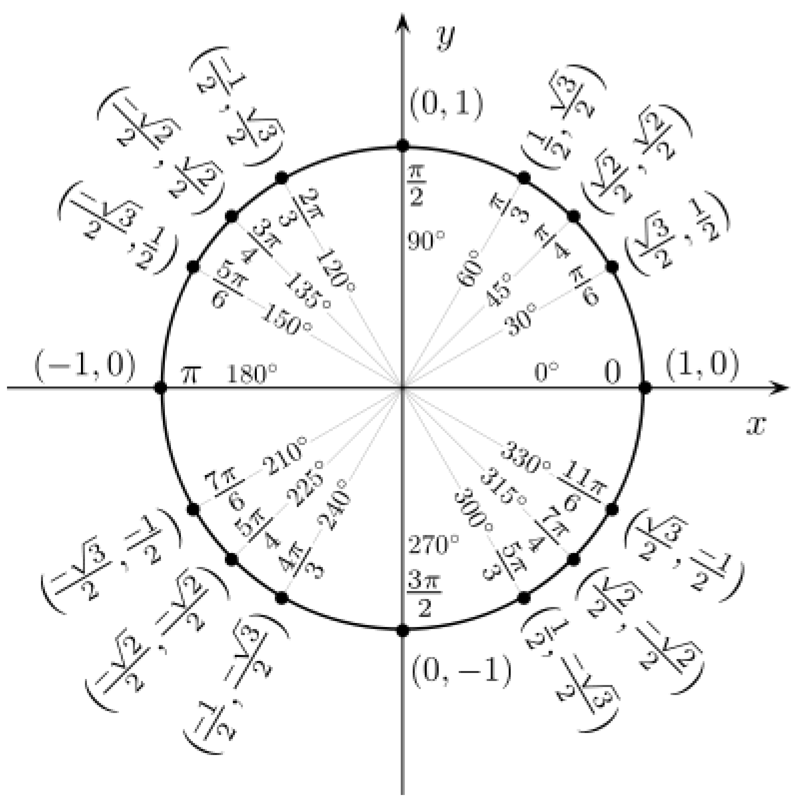


[2]

Si nous voulons calculer la mesure de l’arc AB, nous devrons multiplier la mesure de l’angle n avec la mesure du rayon (soit la mesure de AO ou la mesure de BO).

4.1.2 Le cercle trigonométrique

Passons au deuxième sujet, soit le cercle trigonométrique. En voici un exemple:

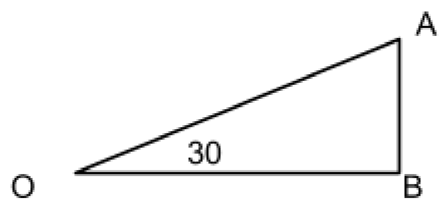


[2] http://www.warmaths.fr/MATH/geometr/Angles/mesarcangll.htm, (Page consultée le lundi 18 mars 2013).

Le cercle trigonométrique est un cercle de rayon d'une unité centré à l'origine d'un plan cartésien. Les angles peuvent être en degrés ou en radians[3]. Ce qui est important de comprendre, c'est que ce cercle trigonométrique a été construit à l'aide des rapports dans le triangle rectangle. Ce sont ces rapports qui nous donnent les coordonnées de chacun des couples présents dans ce cercle.

On a tout d'abord trouvé les coordonnées des couples dans le premier cadran et, par réflexion par rapport à l'un ou l'autre des axes, nous retrouvons les autres couples. Par exemple, la valeur de la variable dépendante du couple correspondant à un angle au centre de 30 degrés est de $\frac{1}{2}$ et la valeur de la variable indépendante est $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Si nous effectuons une réflexion par rapport à l'axe des ordonnées, nous remarquons que nous obtenons le couple correspondant à l'angle au centre de 150 degrés. Ainsi, pour un angle au centre de 150 degrés, la valeur de la variable dépendante sera $\frac{1}{2}$ et la valeur de la variable indépendante sera $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ puisque nous sommes à la gauche de l'axe des ordonnées.

Le dernier raisonnement important pour les élèves est de bien distinguer quelle coordonnée correspond à la valeur du sinus et quelle coordonnée correspond au cosinus de l'angle. Prenons encore l'angle de 30 degrés et représentons le couple à l'aide du triangle rectangle suivant:



Nous savons, grâce au cercle trigonométrique que les coordonnées de A sont ($\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\frac{1}{2}$). Nous pouvons donc dire que OB mesure $\frac{\sqrt{3}}{2}$unités et AB mesure $\frac{1}{2}$ unités. Nous savons également que OA mesure 1 unité puisqu'il s'agit du rayon du cercle. En utilisant les rapport trigonométriques dans le triangles rectangles, nous obtenons que sin(30) = AB/OA = $\frac{1}{2}/1 = \frac{1}{2}$ et que cos(30) = OB/OA = $\frac{\sqrt{3}}{2}/1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$. De cette façon, on trouve que le sinus de l'angle, dans le cercle trigonométrique, correspond à la valeur de la variable dépendante et le cosinus d'un angle correspond à la valeur de la variable indépendante. Ainsi, si nous avons un point P sur le cercle trigonométrique associé à un angle θ, nous pouvons déterminer les coordonnées su point comme ceci: P(cos(θ), sin(θ)).

[3] Pour ceux qui ne seraient pas à l'aise avec les radians, consulter le sujet "Recherche de mesure d'arcs à partir d'angles au centre" plus haut.

4.2 Difficultés et conceptions

4.2.1 La recherche de mesure d’arcs à partit d’angles au centre

La difficulté principale de ce sujet est évidemment les radians. Cette unité de mesure est nouvelle pour les élèves et le fait qu’elle comporte des valeurs de πcausera certainement des difficultés aux élèves. Le vocabulaire relié au cercle (comme arc, corde, angle au centre, etc.) pourra aussi causer problème aux élèves.

4.2.2 Le cercle trigonométrique

Évidemment, ici aussi les radians causeront problème aux élèves. Ils ne sont pas familiers avec des expressions du style $\frac{\sqrt{3}}{2}$ et ils auront souvent tendance à vouloir les transformer en nombres décimaux, ce qui pourrait leur causer encore plus de difficultés. Évidemment, une autre difficulté sera de confondre les coordonnées de certains points. Ils inverseront la valeur de la variable indépendante et celle de la variable dépendante par rapport au sinus et au cosinus.

5. Les fonctions trigonométriques

Les fonctions trigonométriques sont séparées en deux parties. Il y a tout d’abord les fonctions sinusoïdales (la fonction sinus et la fonction cosinus) ainsi que la fonction tangente. Les deux types de fonctions sont au programme de TS et de SN en troisième année du deuxième cycle du secondaire. Peu importe la séquence, la fonction contient les paramètres a, b, h et k. Par exemple, pour la fonction sinus, la règle de base étudiée est la suivante: $f(x) = a \sin b(x - h) + k$.

5.1 Les raisonnements importants

Les fonctions trigonométriques peuvent être représentées par différents modes :

- Par un contexte ;
- Par une table de valeurs ;
- Par un graphique ;
- Par une expression algébrique.

Il sera donc essentiel de prendre en considération ces quatre modes de représentation dans cette analyse.

5.1.1. Modèle trigonométrique

Le passage de la trigonométrie dans le triangle ainsi que dans le cercle aux fonctions trigonométriques peut être assez difficile pour les élèves puisque plusieurs d'entre eux ont de la difficulté à comprendre qu'un sinus (ou un cosinus, une tangente, etc.) n'est pas une opération sur le nombre comme une multiplication ou une addition. Par exemple, sin(43) est un nombre en soi! De cette façon, les élèves ont de la difficulté à comprendre comment on peut avoir une fonction utilisant ces "opérations".

Évidemment, la meilleure façon d'introduire la fonction sinusoïdale est la situation de la grande roue. On présente la situation suivante[4] aux élèves et on leur demande de tracer l'allure du graphique de la hauteur de Gérard en fonction du temps qui passe: "Gérard embarque dans le manège de la Grande Roue à La Ronde. Lorsqu'il embarque, il se situe au niveau du sol. À ce moment, la roue se met en marche et elle tourne pendant deux minutes."

Simplement avec cet exemple banal, l'élève pourra prendre conscience de plusieurs mauvaises conceptions qu'il a face à cette situation et cela le préparera à recevoir l'enseignement sur les fonctions sinusoïdales.

Finalement, il est important que les élèves aient connaissance des radians puisque le graphique d'une fonction sinusoïdale peut être en degrés ou en radians.

5.2 Les paramètres

Dans le programme de formation de l'école québécoise, l'enseignant se doit d'amener l'élève à faire l'étude complète de la fonction sinusoïdale de base et transformée. La règle de la fonction sinusoïdale transformée présente plusieurs paramètres avec lesquels les élèves sont *censés* être déjà familiers. En effet, la fonction sinusoïdale de base peut être transformée en introduisant les paramètres a, b, h et k de façon à obtenir une règle de la forme :

$$f(x) = a \sin (b(x-h)) + k \text{ pour } a \neq 0 \text{ et } b \neq 0$$

Il serait intéressant pour l'enseignant de mettre à profit les outils technologiques (GeoGebra et/ou la calculatrice graphique) mis à la disposition des élèves. En effet, une situation réelle pourrait être fournie aux élèves afin qu'ils observent particulièrement l'impact des paramètres multiplicatifs et additifs sur le graphique de la fonction de base. Il sera tout de même important de considérer un paramètre à la fois. L'élève qui est au centre de ses apprentissages pourra ainsi réinvestir ses connaissances et non répéter un processus ou une méthode apprise par cœur.

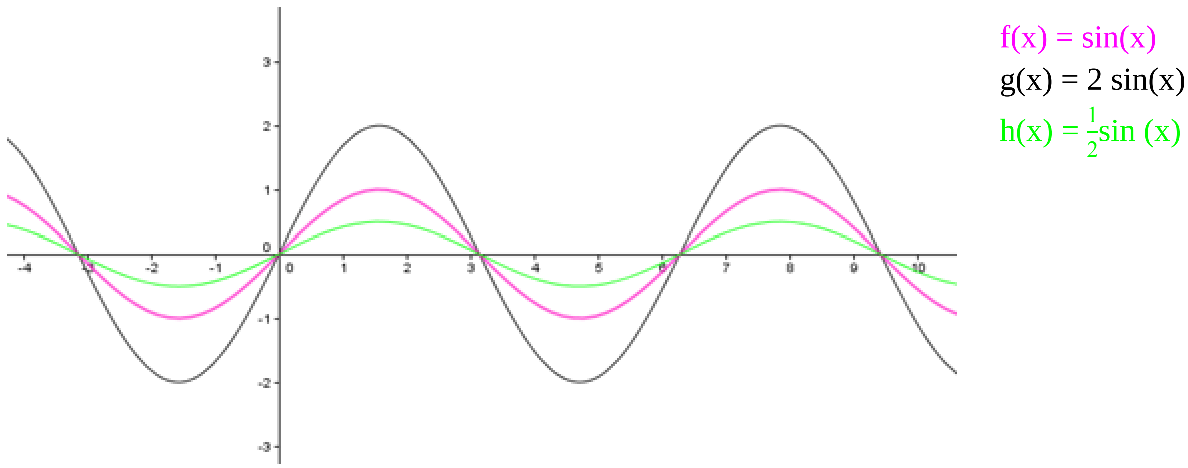
[4] Ou une situation similaire!

Il est également important de noter que dans cette étude, nous prendrons en compte uniquement la fonction sinus. Pour avoir des informations sur la fonction cosinus ou tangente, veuillez vous référer aux sections 5.3. et 5.4.

Finalement, il est à noter que les fonctions sinusoïdales sont des fonctions périodiques, dont la période est de 2π(pour la fonction de base). Ce qui veut dire que f(x) = f(x + 2π).

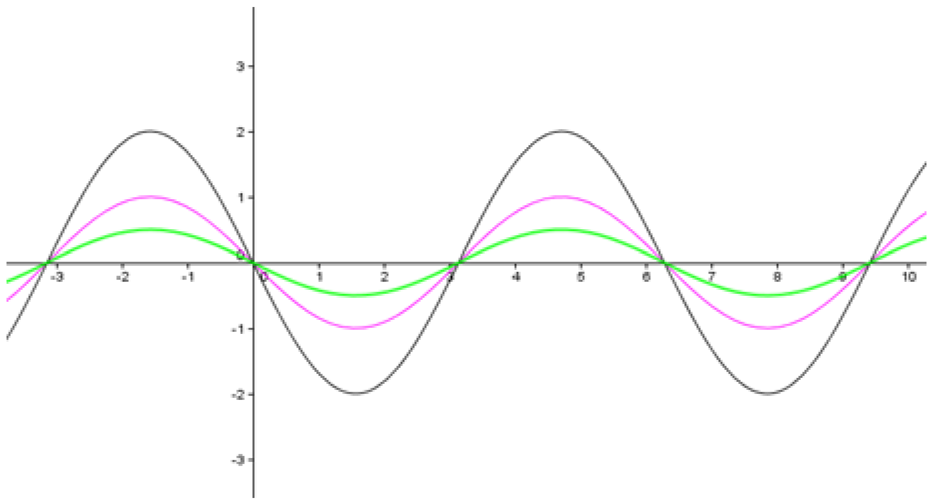
5.2.1. Le rôle du paramètre “a”

En faisant varier la valeur du paramètre “a”, avec a > 0, l’élève observe que ce paramètre provoque un changement d’échelle vertical de facteur “a”, (les ordonnées sont multipliées par a).



x	f(x) = sin(x)	g(x) = 2 sin (x)	h(x) = $\frac{1}{2}$sin (x)
0	**0**	**0**	**0**
$\frac{\pi}{2}$	**1**	**2**	$\frac{1}{2}$
π	**0**	**0**	**0**
$\frac{3\pi}{2}$	**-1**	**-2**	$-\frac{1}{2}$
2π	**0**	**0**	**0**

En changeant le signe du paramètre “a”, l’élève observe une réflexion du graphique par rapport à l’axe des abscisses.



$i(x) = -\sin(x)$
$j(x) = -2\sin(x)$
$k(x) = -\frac{1}{2}\sin(x)$

En effet, en comparant les fonctions f(x) et i(x), les fonctions g(x) et j(x) et les fonctions h(x) et k(x), l’élève remarque qu’elles sont bien la réflexion l’une de l’autre par rapport à l’axe des abscisses.

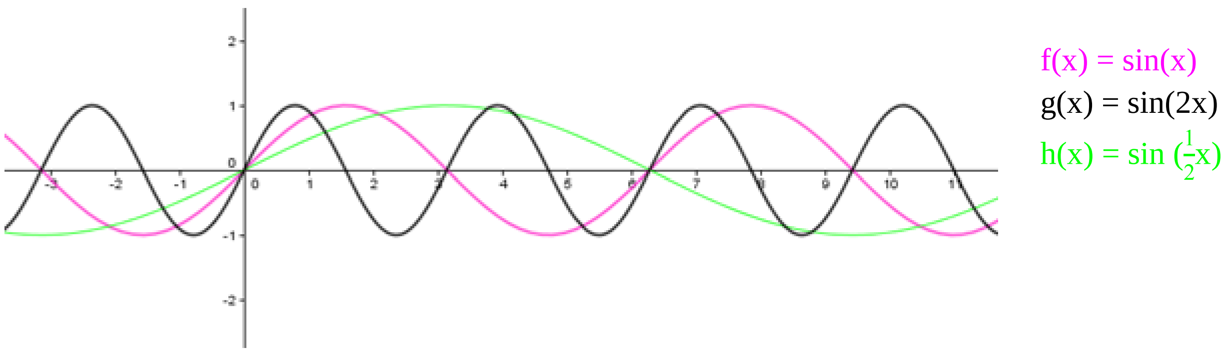
x	$i(x) = -\sin(x)$	$j(x) = -2\sin(x)$	$k(x) = -\frac{1}{2}\sin(x)$
0	**0**	**0**	**0**
$\frac{\pi}{2}$	**-1**	**-2**	$-\frac{1}{2}$
π	**0**	**0**	**0**
$\frac{3\pi}{2}$	**1**	**2**	$\frac{1}{2}$
2π	**0**	**0**	**0**

Table des matières

Également, il est à noter que le paramètre “a” influence l’amplitude de la fonction sinus. En fait, la valeur absolue du paramètre “a” détermine l’amplitude de la fonction. Pour ceux qui ne seraient pas à l’aise avec l’amplitude, voici la formule qui permet de la calculer: $A = \frac{\max - \min}{2}$.

5.2.5. Le rôle du paramètre “b”

En faisant varier la valeur du paramètre “b”, avec b > 0 l’élève observe que ce paramètre provoque un changement d’échelle horizontal de facteur “b”, (les abscisses sont divisée par b).



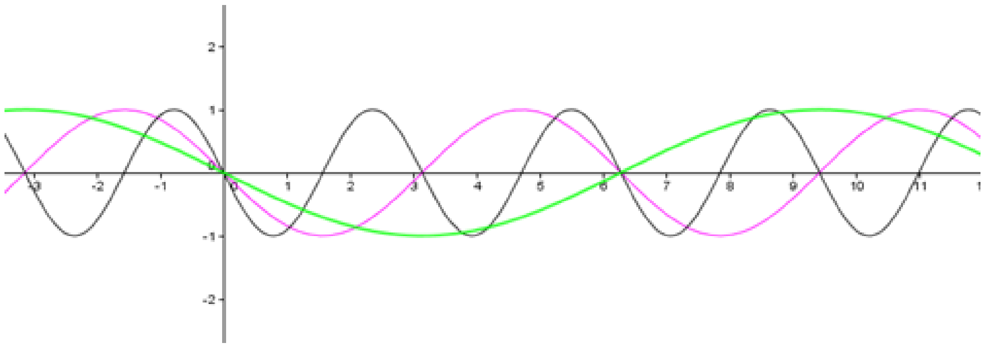
x	f(x) = sin(x)	g(x) = sin (2x)	h(x) =sin $(\frac{1}{2}x)$
0	**0**	**0**	**0**
$\frac{\pi}{2}$	**1**	**0**	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
π	**0**	**0**	**1**
$\frac{3\pi}{2}$	**-1**	**0**	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
2π	**0**	**0**	**0**

En changeant le signe du paramètre “b”, l’élève observe une réflexion du graphique par rapport à l’axe des ordonnées.

$i(x) = \sin(-x)$

$j(x) = \sin(-x)$

$k(x) = \sin\left(-\frac{1}{2}x\right)$



En effet, en comparant les fonctions f(x) et i(x), les fonctions g(x) et j(x) et les fonctions h(x) et k(x), l’élève remarque quelles sont bien la réflexion l’une de l’autre par rapport à l’axe des ordonnées.

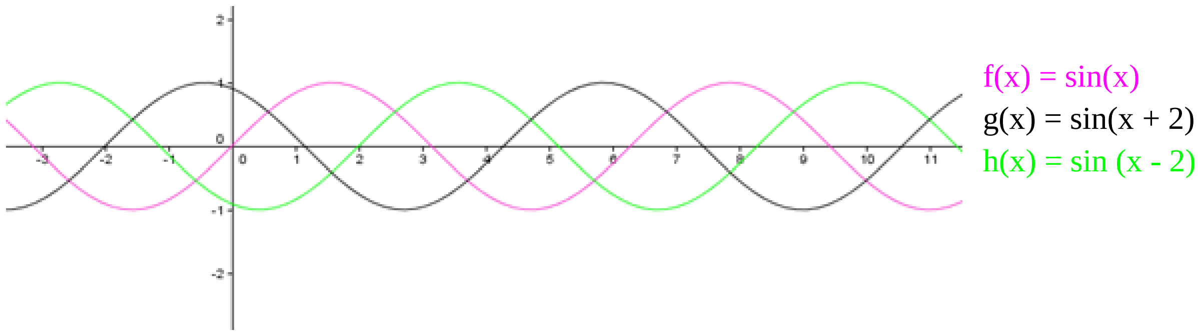
x	$i(x) = \sin(-x)$	$j(x) = \sin(-2x)$	$k(x) = \sin\left(-\frac{1}{2}x\right)$
0	**0**	**0**	**0**
$\frac{\pi}{2}$	**-1**	**0**	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
π	**0**	**0**	**1**
$\frac{3\pi}{2}$	**1**	**0**	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
2π	**0**	**0**	**0**

Il est finalement important de noter que le paramètre b influence la période de la fonction sinus. En effet, la période d’une fonction sinus se calcule à l’aide de la formule suivante: $P = \frac{2\pi}{|b|}$.

Table des matières

5.2.3. Le rôle du paramètre “h”

En faisant varier le paramètre “h”, l’élève observe que ce paramètre provoque une translation horizontale du graphique de “h” unités (les abscisses sont augmentées de h).

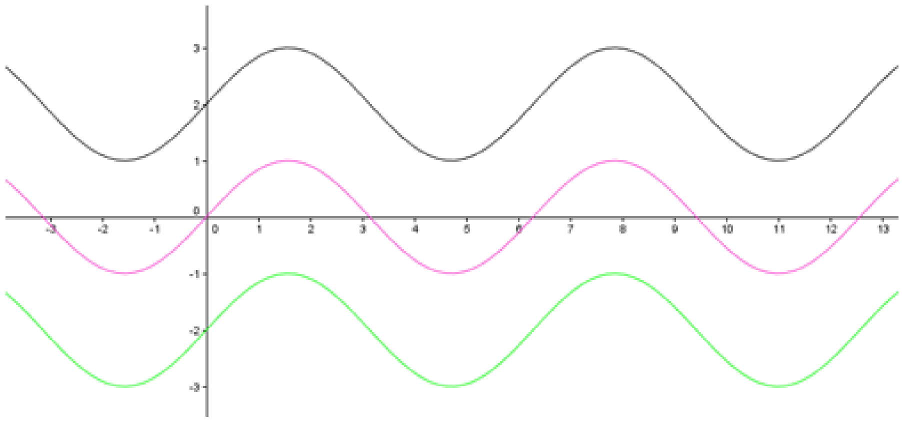


x	f(x) = sin(x)	g(x) = sin (x + 2)	h(x) =sin (x - 2)
0	**0**	**0,91**	**0**
$\frac{\pi}{2}$	**1**	**-0,42**	**-0,42**
π	**0**	**-0,91**	**0,91**
$\frac{3\pi}{2}$	**-1**	**0,42**	**0,42**
2π	**0**	**0,91**	**-0,91**

Table des matières

5.2.4. Le rôle du paramètre “k”

En faisant varier le paramètre “k”, l’élève observe que ce paramètre provoque une translation verticale du graphique de “k” unités (les ordonnées sont augmentées de k).

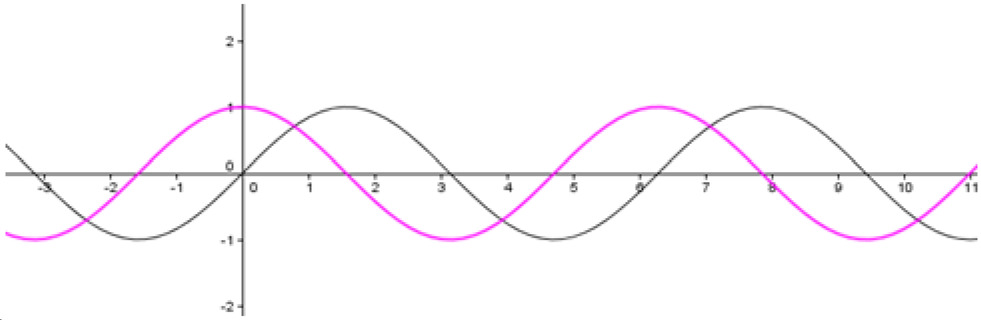


$f(x) = \sin(x)$
$g(x) = \sin(x) + 2$
$h(x) = \sin(x) - 2$

x	$f(x) = \sin(x)$	$g(x) = \sin(x) + 2$	$h(x) = \sin(x) - 2$
0	**0**	**2**	**-2**
$\frac{\pi}{2}$	**1**	**3**	**-1**
π	**0**	**2**	**-2**
$\frac{3\pi}{2}$	**-1**	**1**	**-3**
2π	**0**	**2**	**-2**

5.3 La fonction cosinus

Afin de ne pas alourdir cette analyse, nous n’effectuerons pas tout le travail sur les paramètres de la fonction cosinus puisqu’elle suit le même modèle que la fonction sinus. En effet, et cela peut être une belle propriété à faire découvrir aux élèves que la fonction cosinus est la même fonction que la fonction sinus, mais avec une translation horizontale de $\frac{\pi}{2}$ vers la gauche.



f(x) = sin(x)
g(x) = cos(x)

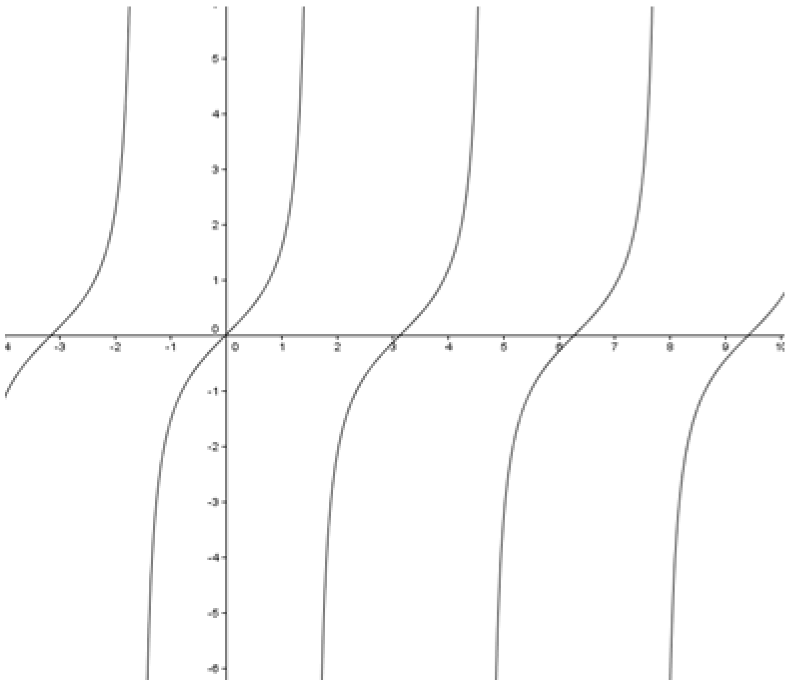
x	f(x) = sin(x)	g(x) = cos(x)	h(x) =sin (x - $\frac{}{2}$)
0	**0**	**1**	**1**
$\frac{\pi}{2}$	**1**	**0**	**0**
π	**0**	**-1**	**-1**
$\frac{3\pi}{2}$	**-1**	**0**	**0**
2π	**0**	**1**	**1**

Nous remarquons ainsi que les fonctions g et h sont équivalentes. Il est aussi à noter que les paramètres sur la fonction cosinus ont exactement le même effet que sur la fonction sinus.

5.4 La fonction tangente

Pour la fonction tangente, nous n'effectuerons pas l'étude des paramètres puisque cette étude a déjà été faite pour la fonction sinus. Les quatre paramètres ont exactement le même effet sur la fonction tangente. Leur étude peut cependant être intéressante avec les élèves!

La propriété principale de la fonction tangente est la présence de multiples asymptotes.



f(x) = tan(x).

x	f(x) = tan(x)
0	**0**
$\boldsymbol{\frac{\pi}{4}}$	**1**
$\boldsymbol{\frac{\pi}{2}}$	**indéfini**
$\boldsymbol{\frac{3\pi}{4}}$	**-1**
π	**0**

Il est à noter que la fonction tangente est une fonction périodique avec une période de longueur π(pour la fonction de base). Ainsi f(x) = f(x + π) pour la fonction tangente de base.

Table des matières

Pour ce qui est des asymptotes, on peut remarquer dans la table de valeurs qu'en x = $\frac{\pi}{2}$, la fonction tangente n'est pas définie et il y a asymptote. Également, puisque cette fonction est périodique, cet asymptote se répète en x = -$\frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2}$, $\frac{5\pi}{2}$, etc.

Afin de comprendre pourquoi la fonction tangente possède des asymptotes, il faut retourner au cercle trigonométrique ainsi qu'aux rapports trigonométriques dans le triangle rectangle. Si on se souvient, une tangente est le rapport entre le sinus et le cosinus: $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$. Ainsi, si on se rapporte au cercle trigonométrique, pour un angle de $\frac{\pi}{6}$radians, le sinus équivant à $\frac{1}{2}$et le cosinus vaut $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Ainsi, si nous désirons obtenir la tangente de cet angle, nous effectuons la division et nous obtenons $\frac{1}{\sqrt{3}}$. Toutefois, pour un angle de $\frac{\pi}{2}$, le sinus vaut 1 et le cosinus vaut 0. Ainsi, lorsque nous voulons obtenir la tangente, nous effectuons l'opération suivante: $\tan\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{0}$, ce qui est une indétermination en mathématique. Le même phénomène se produit en $\frac{3\pi}{2}$. C'est donc pourquoi la fonction tangente possède des asymptotes.

5.5 Recherche de la règle d'une fonction trigonométrique

L'élève doit établir la règle d'une fonction exponentielle à partir d'un graphique, d'une table de valeurs ou d'une situation. L'élève doit donc déterminer la valeur de chaque paramètre à l'aide de l'amplitude de la fonction, de la longueuer de sa période, ainsi que de ses translations horizontales et/ou verticales par rapport à la fonction de base.

Il est à noter que si l'élève est en mesure d'obtenir trois des quatre paramètres, il peut toujours remplacer un des couples dans la règle afin de trouver la valeur du quatrième paramètre.

5.6 Résolution d'équations trigonométriques

La résolution algébrique d'équations trigonométriques peut causer plusieurs difficultés chez les élèves. Regardons un exemple consistant à trouver le zéro de la fonction f définie par $f(x) = 2\sin(x - \frac{\pi}{2}) + \frac{\pi}{2}$. L'idée est donc de chercher la valeur de x lorsque f(x) = 0.

$$0 = 2\sin(x - \tfrac{\pi}{2}) + \tfrac{\pi}{2}$$
$$-\tfrac{\pi}{2} = 2\sin(x - \tfrac{\pi}{2})$$
$$-\tfrac{\pi}{4} = \sin(x - \tfrac{\pi}{2})$$
$$\sin^{-1}(-\tfrac{\pi}{4}) = x - \tfrac{\pi}{2}$$

À ce moment, l'élève doit aller chercher dans le cercle trigonométrique afin de savoir quelle est la valeur de $\sin^{-1}(-\frac{\pi}{4})$. Cette valeur est équivalente à

$$1/(\sin(-\tfrac{\pi}{4})) = 1/(\sin(\tfrac{7\pi}{4})) = 1/(-\tfrac{\sqrt{2}}{2}) = -\tfrac{2}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2}\ .$$

$$-\sqrt{2} = x - \tfrac{\pi}{2}$$
$$-\sqrt{2} + \tfrac{\pi}{2} = x$$
$$\frac{\pi - 2\sqrt{2}}{2} = x$$

L'élève peut laisser l'expression sous cette forme ou la transformer sous forme de nombre décimal:

$$-0{,}43 \approx x$$

6. Les identités trigonométriques

6.1 Les raisonnements importants

Les identités trigonométriques sont au programme de TS et de SN de secondaire 5. Cependant, le programme de formation apporte cette nuance: “Les formules de somme et de différence d’angles sont uniquement prescrites en SN.[5]”

Il est important de noter que ce même programme ne donne pas exactement les identités trigonométriques qui sont à étudier avec les élèves. Le programme donne cependant les exemples suivants[6]:

- $\cos(A + B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$
- $\cos(90 - (A + B)) = \sin(A + B)$
- $\operatorname{cosec} A(\operatorname{cosec} A - \sin A) = \cot$
- $\sin\theta = \cos\theta\sqrt{\sec^2\theta - 1}$
- $2\cos^2\beta - 1 = \frac{\cot\beta - \tan\beta}{\cot\beta + \tan\beta}$
- $\tan^2\alpha + \cos^2\alpha - 1 = \sin^2\alpha\tan^2\alpha$
- $\sin^4\alpha - \cos^4\alpha = 2\sin^2\alpha - 1$
- $\frac{1 + \sec\alpha}{\sec\alpha - 1} + \frac{1 + \cos\alpha}{\cos\alpha - 1} = 0$
- $(1 + \sec\beta)(\sec\beta - 1) = \frac{\sin\beta\sec\beta}{\cos\beta\operatorname{cosec}\beta}$
- $\sin 2\alpha \sec\alpha = 2\sin\alpha$

Le programme demande aux élèves de valider les différentes identités. Ce qui demande donc un gros travail algébrique pour passer de l’une à l’autre (afin de les démontrer). Ces identités, une fois prouvées, peuvent servir à trouver certaines mesures dans le triangle ou dans le cercle.

Évidemment, les identités trigonométriques sont l’un des sujets les plus difficiles pour les élèves puisqu’elles demandent une maîtrise avancée de l’algèbre ainsi que de tous les concepts reliés à la trigonométrie. Les élèves peuvent aussi avoir de la difficulté avec l’idée d’une preuve algébrique mathématique. Cependant, c’est une belle introduction à des mathématiques qui se font au cégep et à l’université.

---

[5] QUÉBEC, MINISTÈRE DE L’ÉDUCATION DES LOISIRS ET DES SPORTS. Un p*rogramme de formation pour le XXIe siècle ; Programme de formation de l’école québécoise, Enseignement secondaire, deuxième cycle,* Québec, Publications du Québec, 2007, p. 140.

[6] Idem., p. 134.

Table des matières

7. Applications de la trigonométrie dans la vie courante[7]

La trigonométrie est appliquée dans une foule de domaines et c'est l'un des domaines de la mathématique qui est le plus utile dans le monde. Pour n'en nommer que quelques uns, la trigonométrie est utilisée en architecture, astronomie, biologie, cartographie, infographie, optique, pharmacologie, etc.

Par exemple, lorsque nous jouons d'un instrument à corde, par exemple une guitare, lorsque la corde bouge, elle bouge d'une façon qui ressemble beaucoup à une fonction sinusoîdale et ce n'est certainement pas un hasard. D'ailleurs, Pythagore a été l'un des premiers à étudier les concepts mathématiques dans la musique.

Également, les séries de Fourier (qui sont des séries trigonométriques) sont utilisés dans plusieurs domaines comme l'informatique, soit dans la compression de fichiers numériques (audio, vidéo, image). Ces séries sont également beaucoup présentes en statistiques dans les courbes gaussiennes.

[7] Applications de la trigonométrie, http://fr.wikipedia.org/wiki/Applications_de_la_trigonom%C3%A9trie, (Page consultée le jeudi 21 mars 2013).

8. BIBLIOGRAPHIE

1. Livres

Recueil de Notes de cours, MAT6221 *Histoire des mathématiques*, Louis Charbonneau.

2. Publications gouvernementales

QUÉBEC, MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION DES LOISIRS ET DES SPORTS. *Un programme de formation pour le XXIe siècle ; Programme de formation de l'école québécoise, Enseignement secondaire, deuxième cycle*, Québec, Publications du Québec, 2007, 633 p.

3. Sites Internet

Aperçu historique de la trigonométrie rectiligne et sphérique. 2013. En ligne.
«http://www.snl.lu/publications/bulletin/SNL_1950_054_005_017.pdf».
Consulté le 18 mars 2013.

Fonction sinus. 2013. En ligne.
«http://recit.csdps.qc.ca/usagers/vallieresm/math536/image_pdf/fct_sinus_cond.pdf».
Consulté le 21 mars 2013.

Historique de la trigonométrie comme science pratique. 2013. En ligne.
«http://www.pratiquemath.org/spip/spip.php?article28 ».
Consulté le 18 mars 2013.

L'histoire de la trigonométrie. 2013. En ligne.
«http://www.youtube.com/watch?v=wY4CwAhF19g».
Consulté le 18 mars 2013.

Mathématiques. 2013. En ligne.
«http://www.warmaths.fr/MATH/geometr/Angles/mesarcangll.htm».
Consulté le 22 mars 2013.

Math'ic. 2013. En ligne.
«http://magiquemath2013.blogspot.ca/2012/09/petit-rappel-cercle-trigonometrique.html».
Consulté le 21 mars 2013.

Wikipédia. 2013. En ligne.
«http://fr.wikipedia.org/wiki/Trigonom%C3%A9trie#Histoire_de_la_trigonom.C3.A9trie».
Consulté le 20 mars 2013.

Wikipédia Trigonométrie. 2013. En ligne.
«http://fr.wikipedia.org/wiki/Trigonom%C3%A9trie».
Consulté le 20 mars 2013.

Wikipédia Le radian. 2013. En ligne.
«http://fr.wikipedia.org/wiki/Radian».
Consulté le 18 mars 2013.

Wikipédia Applications de la trigonométrie. 2013. En ligne.
«http://fr.wikipedia.org/wiki/Applications_de_la_trigonom%C3%A9trie».
Consulté le 21 mars 2013.